吉備国際大学研究紀要（保健科学部） 第20号，19～25，2010

重錘負荷時の膝伸展運動の動力学Ⅰ
素早い伸展の膝角運動における運動方程式に関する一考察

橘　浩久

Dynamics of knee extension motion with a weight I
A consideration of equation of angler motion in the case of rapid knee extension

Hirohisa TACHIBANA

要　旨

下腿に重錘が負荷され、膝関節を素早く伸展させた場合の角運動における運動方程式が導出される。運動方程式を構築するためには、最大筋力に対する出力筋力の時間に関する比率関数が導入されなければならない。現象論的な議論から、このような比率関数が決定される。

キーワード：膝関節伸展運動、運動方程式、大腿四頭筋訓練、重錘付加、筋力の比率関数

Key words：knee extension, equations of motion, quadriceps strengthening exercise, weight, ratio function of muscle force

1．はじめに

この論文は、大腿四頭筋訓練の動力学的メカニズムを明らかにするためのひとつの試みを述べたものである。訓練モデルに使用される負荷は重錘である。つまり、下腿に付加的重力が作用する場合の膝関節運動の動力学的解析に関する考察である。

2007年、Anderson, Madigan および Nussbaum（以下 AMN と略す）が下肢関節最大トルク関数モデル[1)]を発表し以来、本研究と類似の研究が多数現れると考えられたのだけれども、残念ながら未だそのような研究は報告されていないようである。その理由としては、AMN 関数が与えられた関節角と角速度における最大関節トルクのみを算出すること、したがって実際の運動を表すためには AMN 関数から任意出力トルクを取り出すための関数を決定しなければならないが、そのことが未だ達成されていないことが考えられる。この問題は非常にデリケートで、ともすれば人間の自由意志の問題にも関わってくるかもしれない。例えば、我々が本論文で取り扱うような、足部（正確には足関節）に重錘を取り付けて下腿を振り上げるという単純な膝関節運動を考えた場合でも、人間はその運動に直接関わる部位（膝関節、大腿四頭筋等）の損傷を避ける等の理由で、その運動を自ら制御するであろう。このような人間の意思に関わる恣意性は、現在では未だ物理学の範囲外にある[2)]。こうしてこのような単純な例でさえも、異様に複雑化されてしまうのである。

上のような物理学的恣意性を避けるためには、関節運動を強く拘束するような、ある程度極端な運動例を考える必要があるだろう。このようなことは、問題を単純化するために物理学ではよく行われることである。そこで本論文では、被験者が（彼らにとって）最大の角速度でもって膝関節を運動させる（あるいはそう感じる）ような場合を考える。そうすることによって、運動の揺らぎを最小限にとどめることができるし、また運動中の意思の介入を最小限に押さえることができるであろう。

吉備国際大学保健科学部理学療法学科
〒716－8508　岡山県高梁市伊賀町８

Department of Physical Therapy, School of Health Science, Kibi International University
8, Iga-machi, Takahashi-City, Okayama, Japan, 716-8508

２．膝関節の AMN 関数

AMN が与えた最大関節トルクは股関節、膝関節、足関節の下肢の全ての関節に適用できる、角と角速度を変数にもつ関数である。この全下肢関節に適用可能という一般性のため、我々が問題にする部位、つまり膝関節だけ取り上げげた場合、非常に複雑で、また誤解を与えるような形になっている[3)]。したがって、本論文ではその部分を修正し、さらに我々の目的をよりいっそう単純にするため、角の取り方も変更することにしよう。

被験者の股関節点を H、膝関節点を K、足関節点を A、（重錘負荷なしの）膝下部（下腿と足部をあわせた部分）の重心を G、$\overline{\mathrm{KA}}=L$ とする。また、被験者の身長を h、体質量を m、重力加速度を g とする。

（仮想）被験者は水平面に置かれた椅子に座っている（セクション３に示す図１を見よ）。正確を期するために、K から鉛直下方向に延びた半直線を ξ、∠ξKL を ϕ と記し、ξ から測って膝伸展方向角を正の角とする。また、線分 HK は常に水平ではないことに注意しよう。したがって、HK と水平線の傾斜角を ε で記し、H が K を通る水平線より上にあるときに正の角、下にあるときには負の角として定義する。

命題１：膝伸展運動を考えよう。上記の定義において、被験者の最大膝関節トルクを $T_{\max}$ とすると、

$$T_{\max}(\phi,\dot{\phi})=T_{\mathrm{AMN}}(\phi,\dot{\phi})+T_{\mathrm{passive}}(\phi) \quad (1)$$

$$\begin{aligned}T_{\mathrm{AMN}}&(\phi,\dot{\phi}) \quad (2\mathrm{a})\\ &=[H(\dot{\phi})+H(-\dot{\phi})]\\ &\quad\times mghC_1\cos[C_2(\phi+\varepsilon+C_3-\frac{\pi}{2})]\\ &\quad\times\frac{2C_4C_5+|\dot{\phi}|(C_5-3C_4)}{2C_4C_5+|\dot{\phi}|(2C_5-4C_4)}\end{aligned}$$

$$T_{\mathrm{passive}}(\phi)=B\exp[-k(\phi+\varepsilon-\frac{\pi}{2})] \quad (3)$$

で与えられる。ここで、C_1、C_2、…、C_6、B および k は定数で、それぞれ次の値をとる[4)]：

$$\begin{aligned}&C_1=0.163,\quad C_2=1.258,\quad C_3=1.133,\\ &C_4=1.517,\quad C_5=3.952,\quad C_6=-4.521,\\ &B=-6.250,\quad k=-4.521\end{aligned} \quad (4)$$

また、H はヘビサイド関数で

$$H(x)=\begin{cases}1 & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases} \quad (5)$$

である。[5)]

今後の議論を簡潔にするため、（２a）で与えられたトルク T_{AMN} を膝 AMN 関数、あるいは膝 AMN トルクと呼ぶことにする。また、（３）で与えられるトルクはパッシブトルク[6)]であり、これは単なる連続体としてみなした活性化されていない筋について、それを引き延ばしたときに自然長に戻ろうとする力によって引き起こされたトルクである。

式（２a）を見ればすぐに分かるが、膝 AMN 関数は求心性運動（$\dot{\phi}>0$）と遠心性運動（$\dot{\phi}<0$）の両方（および静止状態：$\dot{\phi}=0$）を含んでいる。本論文では求心性運動のみを取り扱う。したがって、（２a）は次式のように単純化しておいたほうよいであろう：

$$\begin{aligned}T_{\mathrm{AMN}}&(\phi,\dot{\phi}) \quad (2\mathrm{b})\\ &=mghC_1\cos[C_2(\phi+\varepsilon+C_3-\frac{\pi}{2})]\\ &\quad\times\frac{2C_4C_5+\dot{\phi}(C_5-3C_4)}{2C_4C_5+\dot{\phi}(2C_5-4C_4)}\end{aligned}$$

３．重錘負荷時の大腿四頭筋訓練モデルと運動方程式

本論文で想定する大腿四頭筋訓練を図１に示す。座位にある被験者の足関節 A に質量 w の重錘が取り付けられており、静止時に下腿が半直線 ξ に沿っている。指導者の合図とともに、被験者は膝伸展運動を行うこととする。このとき、もし被験者が（最終稼働域まで）持続的な膝伸展可能であるなら、彼は膝関節に関して最大トルクを出力していない（つまり大腿四頭筋に関して最大筋力を発揮していない）ということに注意しよう。なぜなら、伸展を続けるためには、運動時の各瞬間に伸展方向の（すな

わち正の）角速度を有しなければならない､つまり、各瞬間に求心性膝伸展トルクを出力する必要があるからである。こうして我々は、現在想定している大腿四頭筋訓練について､次の運動方程式に到達する：

$$\begin{aligned}[I_0+(\kappa\lambda m+w)L^2]\ddot{\phi} \\ =-(\kappa\lambda m+w)Lg\sin\phi \\ +\rho(t)T_{AMN}(\phi,\dot{\phi})+T_{\text{passive}}(\phi)\end{aligned} \tag{6}$$

ここで、I_0 は膝下部重心 G のまわりの慣性モーメント、κ は G の膝からの距離の膝下部長 L に対する比率（$\kappa=\overline{\mathrm{KG}}/L$）、$\lambda$ は膝下部の体質量に対する比率（$\lambda=m/M$、M は体質量）で、それぞれ次の値をとる[7)]：

$$I_0=0.1044,\quad \kappa=0.437,\quad \lambda=0.060 \tag{7}$$

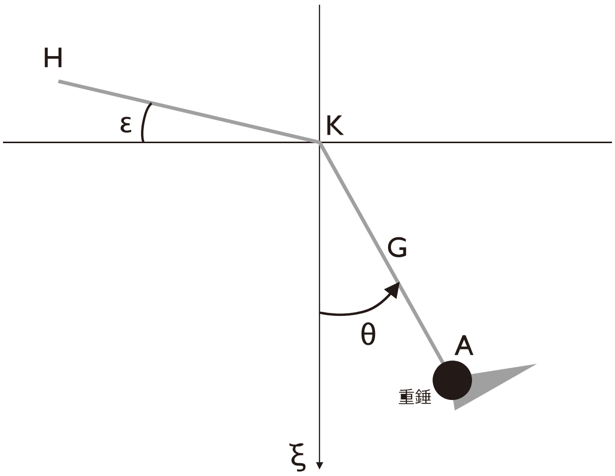

図１　重錘を用いた大腿四頭筋訓練のイメージ。被験者は座位にあり足関節点に重錘が取り付けられている。膝静止時に下腿は鉛直下方向にあり、合図とともに被験者は膝伸展を行う。

式（６）の右辺第二項の AMN トルクに掛かっている ρ が、上で述べた注意に当たる量であり、$0\leq\rho\leq1$ の範囲をとる。このことと命題１から、ρ は最大発揮筋力に対する出力筋力の比率を表すと解釈でき、したがってそれを筋力の比率関数と呼ぶことにしよう。

筋力の比率関数 ρ は、一般に時間の関数で表されるであろう：

$$\rho(t)=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\alpha_3 t^3+\cdots \tag{8a}$$

伸展開始直前には被験者は筋力をまったく発揮していないのだから、伸展開始時刻を 0 (sec) にとることによって、式（８a）の右辺第一項を消去することができる（$\rho(0)=0$）：

$$\rho(t)=\alpha t+\alpha_2 t^2+\alpha_3 t^3+\cdots \tag{8b}$$

ただし、後の便宜のため $\alpha_1=\alpha$ としている。今後の議論を単純にするため、我々は式（８b）の方を採用することにしよう。なお、そのときの初期条件は、$\phi(0)=0$、$\dot{\phi}(0)=0$ である。

運動方程式（６）を解くためには、筋力の比率関数 $\rho(t)$ を決定しなければならない。しかしながら、この関数がいまのところどのような形を取るのか、我々は理論的な根拠を何も持ち合わせていない。したがって、本論文では、セクション１で述べたように強く拘束された運動において、しかも非常に限られた運動範囲について、現象論的な立場からのみそれを議論することにしよう。

４．筋力の比率関数に関する現象論的考察

セクション１でも述べたように、人間の運動には自由意志という物理学的には恣意的な要素が常に介入してくる。運動方程式（６）からすぐ判るように、我々の問題において、そのような恣意的要素が関わってくるのは筋力の比率関数 $\rho(t)$ の部分である。

物理学的恣意的要素を極力抑えるために、実験において、最大の角速度[8)]でもって膝伸展を行うよう被験者に指導した。さらに、膝が完全伸展しないように[9)]、クッションを用いて運動を途中で強制的に（しかし安全に）停止することにした[10)]。このような条件のもとでは、比率関数 $\rho(t)$ は近似的に（時間の）１次関数で表されると期待できる。なぜなら、角速度が大きくさらに強制停止にって運動範囲も限られてくると、運動時間が非常に短くなり t の高次項を無視できるからである。こうして今回の

問題に対して、（８b）から、我々は、

$$\rho(t) \approx \alpha t \tag{9}$$

とおくことができ、α をどのように決定するかということだけに帰着することができる。

さて、実験は 12 人の男性学生に対して、５～９ kg で１kg 刻みの５種類の重錘を用い、各人１種類の重錘について３回ずつの試技を行い角変化を計測した。角 ϕ の計測にはゴニオメータ（TM-511G：日本光電）を用い、マルチテレメータシステム（PowerLab/800：AD Instruments）介して１kHz でアナログ･デジタル変換した後、パーソナルコンピュータに取り込む。さらにこのデータを二階微分が可能になるように *Mathematica*（Wolfram Research, Inc.）を用いてフーリエ変換し高周波数カットオフ処理を行った[11),12)]。またこれ以降のデータ処理（回帰分析）に関しても、同ソフトを用いて行った[11),15)]。

各被験者は、最大角速度と思われる（彼がそのように思っている）運動で１つの試技を行っているが、同一の重錘付加でも、異なる被験者では異なる角速度で運動するであろう。さらに、同一の被験者で同一の重錘を付加した３回の試技においても、それぞれが必ず同じ角速度になるとは限らない、すなわち角速度にはばらつきが生じるであろう。このような考察から、式（６）における定数 α は角速度に関する何らかの量に依存するはずである。しかしながら、$\dot{\phi}$ は一般に時間の関数であり、それを直接 α の依存パラメータとしてしまうと、α の定数性が破れてしまい、α が角速度（関数）$\dot{\phi}$ と直接的に依存関係にあるとすることはできない。そこで我々は角速度 $\dot{\phi}$ の代替量として、平均角速度 $\overline{\omega}$ を考えることにした。$\overline{\omega}$ は単に、採用するデータの最初に現れる角と最後に現れる角の変化量をその所要時間で割った定数である。結果として、$\overline{\omega}$ と α の間に２次式の関係があることが見いだされた。ただし、$\overline{\omega}$ に関して１次の項は無視される。というのは、もしそれを考慮すると、その項は各重錘毎に意味付け不

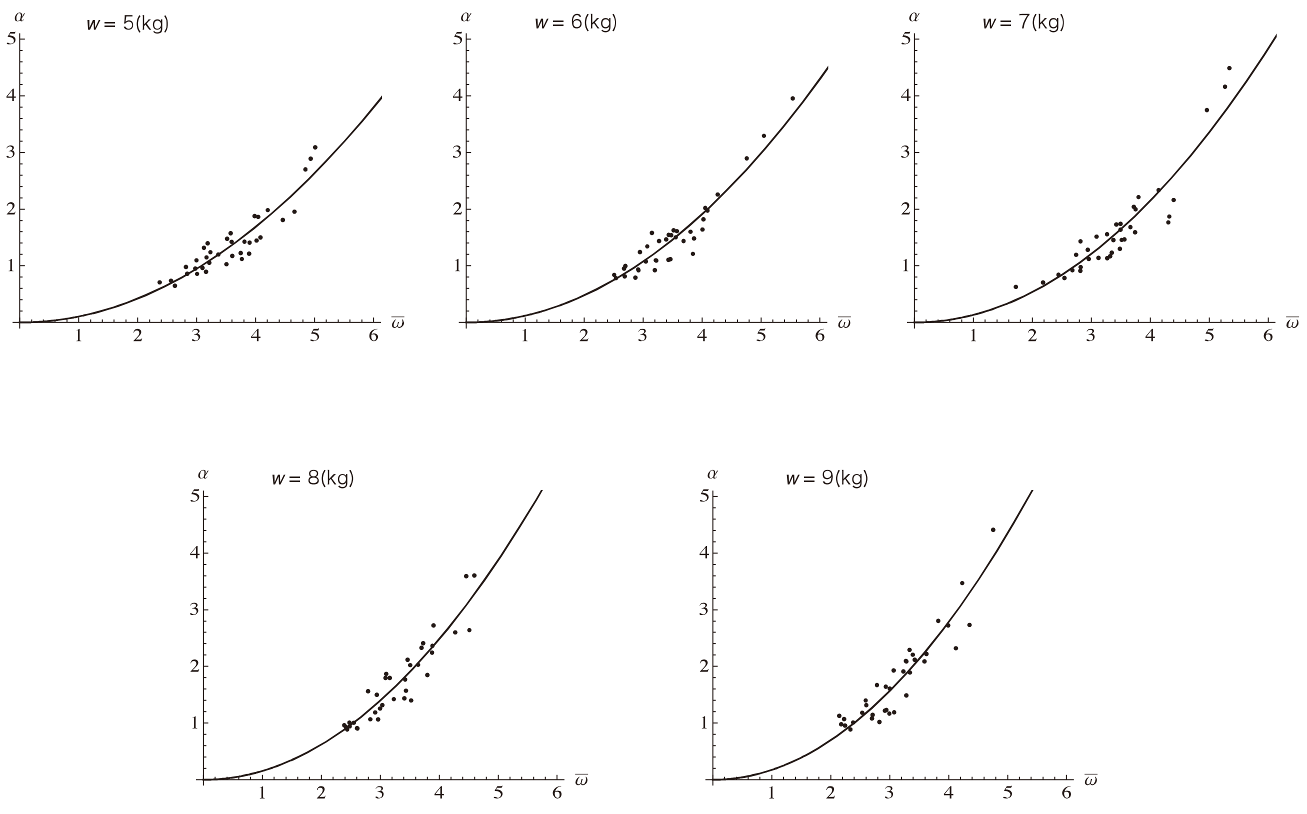

図２　膝伸展の平均角速度 $\overline{\omega}$ と定数 α の間の関係を表すグラフ。点は実験データから算出された値を示し、実線は２次の回帰曲線（最小二乗曲線）を示す。

能な正負の値をとることがデータから示されるし、$\overline{\omega}$の１次の項があろうがなかろうが寄与率 R^2 の値があまり変わらないことも示される。このような理由と単純性の面から見ても１次の項を無視する（原点で極小値をとるようにする）のが妥当である。こうして我々は次の式を得る（図２および表１を参照）[16]：

$$\alpha = \beta\bar{\varpi}^2 \tag{10}$$

この時点で、180（＝12×3×5）個の定数パラメータ（α）が５つの β に絞られる。

次に、(10) における β と他のパラメータの関係を調べる。各重錘毎に定数 β が１つずつあることから、w と β の関係を調べるのが自然であろう。そうすると、これらのパラメータの間に１次式の関係があることがわかる。ただし、そのときに定数項（すなわち切片）が存在することが示される。この定数項はやはり意味付け不能で、関係式を不必要に複雑にしてしまう。そこで、もし重錘も膝下部も存在しなくなったら、筋力の比率関数 ρ がゼロにならなければならないという考察から、重錘質量と膝下部質量（の平均：3.966kg）の κ 倍を加え合わせた量と β の間は、斉次１次の関係でなければならないという結論に達する。実際に、データ解析からこのことが検証された（図３を参照）：

$$\beta = \gamma(\kappa\lambda m + w) \tag{11}$$

$$\gamma = 0.0158\ (\mathrm{sec/\,kg}) \tag{12}$$

ここで、寄与率 R^2 は 0.91997 である。こうして最終的にただ１つの定数パラメータ γ のみが存在する。

以上の議論から、すなわち式（９）、(10) および (11) から、我々は $\rho(t)$ に関して以下の式を得る：

表１　重錘質量 w（５、６、７、８、９kg）に平均膝下部質量平均（3.966kg）の κ 倍を加え合わせた量と定数 β の間の関係。R^2 は各寄与率の値を示す。

$w+\kappa\lambda m$	β	R^2
6.73314	0.10539	0.85684
7.73314	0.11933	0.91512
8.73314	0.13406	0.88961
9.73314	0.15497	0.87165
10.73314	0.17382	0.87021

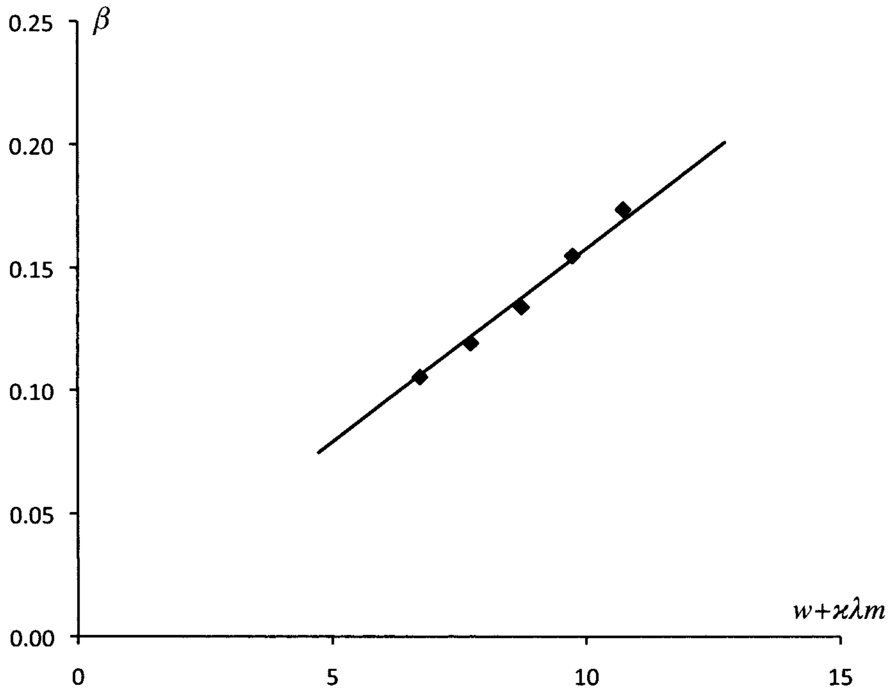

図３　重錘質量（５、６、７、８、９kg）に平均膝下部質量（3.966kg）の κ 倍を加え合わせた量と定数 β の間の関係を表すグラフ。点は実験データから算出された値を示し、実線は２次の回帰直線（最小二乗直線）を示す。

$$\rho(t) = \gamma(\kappa\lambda m + w)\bar{\varpi}^2 t \qquad (13)$$

ここで、γ は（12）の値をとる定数である。

式（13）の筋の比率関数 $\rho(t)$ を導くにあたって、我々は（８b）を採用したことを思い起こそう。（８b）では $\rho(0)=0$ という初期条件を仮定したのであった。しかしながら、$\rho(t)$ は最終的には運動方程式（６）に用いられ、重錘付加時の膝伸展運動を動力学的に解析するための量である。したがって、$\rho(t)$ に初期条件を決めた状態（13）の形で運動方程式（６）にそれを代入してしまうと、運動方程式自体にも初期条件を $\phi(0)=\dot{\phi}(0)=0$ で与えてしまうことになり、方程式の一般性を失ってしまう。これゆえに、（13）は $\rho(t)$ が従う微分方程式の１つの解と見なす方がよいであろう。こうして我々は、素早く膝伸展させる場合の重錘付加時の大腿四頭筋訓練において、筋力の比率関数 $\rho(t)$ の最終的な形式として、

$$\dot{\rho}(t) = \gamma(\kappa\lambda m + w)\bar{\varpi}^2 \qquad (14)$$

という単純な微分方程式に到達する。

５．結　論

人間の意思による運動の制御が極力生じないように、重い重錘を取り付け素早く膝伸展させるという強く拘束された条件の下での運動における運動方程式がどのような形を取るかという問題について、我々は本論文で議論してきた。特に、今回は AMN 関数（２a）あるいは（２b）に掛かる筋力の比率関数 $\rho(t)$ を決定するという問題に注力し、それが従う単純な微分方程式を得ることができた。結果として、上述の運動拘束条件下で、我々が取り扱うべき方程式は（６）（およびそれに含まれる（２a）または（２b）および（３））と（14）であるという結論に達した。次に遂行すべき手続きは、これらの方程式を解き、実験によって得られた計測データと比較することである。そうすることによって、本論文で導いた種々のパラメータ、特に（14）に現れる定数パラメータ γ が修正される可能性も考えられる。しかしながら、そのような研究はそれだけで１つの論文を構成するに値するほど、十分に複雑な問題であると考えられるので、次回の研究に委ねることにしよう。

謝　辞

私は理論物理学を専門としているので、実験に関してはまったくの素人である。したがって、本研究に関する実験の部分は、本学理学療法学科４年次生の飛鷹利明君と末崎翔君が中心になって計画を立て遂行した。彼らの協力と努力に感謝する。また、飛鷹・末崎両君の実験を直接指導して下さったのは、本学スポーツ社会学科講師の山口英峰先生である。山口先生の惜しみのない丁寧なご指導に対して、心より謝意を表する。

Abstract

The equation of angler motion to the rapid extension of a knee which is weighted is derived. In order to construct such an equation of motion, a function, with respect to the time variable, of the ratio of an output muscle force to the maximum muscle force must be introduced. From some phenomenological discussions, such a function is decided.

参考文献と脚注

１）D.E.Anderson, M.L.Madigan and M.A.Nussbaum, *J.Biomechanics* 40, 3105-3113（2007）

２）この類いの問題は、現在多くの研究者によって研究が進められている、脳科学が発展することによって物理学的に解決するかもしれない。例えば、R. Penrose による以下の権威ある著作を見よ：

R.Penrose 著、林一 訳、皇帝の新しい心、みすず書房（1994）

R.Penrose 著、林一 訳、心の影 １、みすず書房（2001）

R.Penrose 著、林一 訳、心の影 ２、みすず書房（2002）

3）例えば、膝伸展運動を考える際、AMN のオリジナルの関数では、対象角としては屈曲角、回転運動としては伸展運動を想定している。そのように考えると物理学的には、前者が正の値を取るとするとするなら後者は負の値を取るとしなければならないところであるが、AMN の関数では両方とも正の値を取るように定義されている。それにも関わらず正しい算出結果を出そうとすると、式は必要以上に複雑になるし、また誤解も与えやすくなる。

4）膝伸展運動に限っている。膝屈曲運動はまた別の値をとるが、本研究には関係ない。また、被験者は 18－25 才の男性を想定している。

5）この命題はもちろん実験によってのみ証明される。文献１）で AMN は性別、年代のグループに分け、１グループ６～14 名ずつの被験者について下肢の各関節の最大トルクを計測し、検証を試みている。

6）P.D.Hogan, R.B.Gorman, G.Todd, S.C.Gandiva and R.D.Herbert, *J.Biomechanics* 38, 1333－1341（2005）

7）Dempster, *WADC Tecnical Report* 55, Wright-Patterson Air Force Base（1955）

8）実際には最大の力で下腿を振り上げるように被験者を指導している。このとき、最大に近い角速度で伸展運動をしていると考えられる。

9）大きい角速度で完全伸展すると、膝関節を損傷する危険性がある。また、その恐怖から被験者が（彼の自由意志で）角速度を抑えることも考えられる。

10）膝関節運動を途中で強制的に停止することから、運動方程式（６）の右辺第３項のパッシブトルク $T_{\mathrm{passive}}(\phi)$ の項を無視することができる。膝伸展運動に関してパッシブトルクが効いてくるのは、膝関節が完全伸展になる近傍（すなわち活性化されていない筋が自然長より延びた場合）だからである。しかしながら、形式的にこの項を残しておくことにする。

11）S.Wolfram 著、田辺誠・他 訳、*MATHEMATICA* ブック（第３版）、トッパン（1998）

12）W.T.Shaw・J.Tigg 著、小野陽子 訳、応用 *Mathematica*、新紀元社（2004）

13）W.Gray 著、時田節・竹沢護 訳、*Mathematica* 方法と応用、サイエンティスト社（1996）

14）R.Mader 著、時田節 訳、プログラミング *MATHEMATICA*、ピアソン（1999）

15）R.J.Gayload・S.N.Kaminn・P.R.Wellin 著、榊原進 訳、*Mathematica* プログラミング、近代科学社（1994）

16）なお、定数項ははじめから考慮する必要がないことに注意せよ。というのは、それが存在すると $\overline{\varpi}$ ゼロでも $\rho(t)$ がゼロにならない。すなわち下腿が鉛直下方向に静止している状態でも、（時間的に増大する）膝関節トルクが出力されてしまうことになり、物理的に矛盾した結果を導いてしまう。